FINAŁ XXVII KONKURSU MATEMATYCZNEGO MAŁACHOWIAK (2023/2024)

Imię: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Nazwisko: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Data urodzenia: .....

Nazwa Szkoły: .....

.....

telefon kontaktowy rodzica/opiekuna: .....

Imię:

Nazwisko:

Konkurs Matematyczny
MAŁACHOWIAK

W zadaniach 1–6 w miejsce kratek prosimy wpisać TAK – w przypadku, kiedy odpowiedź jest prawdziwa oraz NIE – w przypadku, kiedy odpowiedź jest fałszywa.

Zadanie 1. Dana jest liczba naturalna n, o której wiadomo, że jeśli dodamy do niej 4, albo odejmiemy od niej 8, to otrzymane wyniki będą kwadratami innych liczb naturalnych. A zatem:

- ☐ najmniejszą liczbą naturalną n spełniającą warunki zadania jest 12;
- ☐ liczba spełniająca warunki zadania ma cyfrę jedności równą 2;
- ☐ liczba n spełniająca warunki zadania jest liczbą pierwszą;
- ☐ gdy od liczby n spełniającej warunki zadania odejmiemy 1, to otrzymany wynik będzie liczbą pierwszą.

Zadanie 2. O liczbach $a, b \in R$ takich, że $a \neq 0, b \neq 0$ wiadomo, że $1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{1+a+b}$. A zatem:

- ☐ liczby a i b mogą być dowolnymi liczbami przeciwnymi;
- ☐ $a = 1$ oraz $b = 1$;
- ☐ jedna z liczb a lub b może być równa (-1), a druga może być dowolną liczbą rzeczywistą;
- ☐ liczby a i b muszą być liczbami pierwszymi.

Zadanie 3. Z miasta A do miasta B ruszył samochód osobowy i całą trasę przejechał w czasie 45 minut. W tej samej chwili z miasta B do miasta A wyruszył samochód ciężarowy i całą trasę przejechał w ciągu 60 minut. Wówczas:

- ☐ samochody minęły się po upływie $\frac{3}{7}$ godziny;
- ☐ prędkość samochodu osobowego była o 25% większa niż samochodu ciężarowego;
- ☐ do momentu spotkania się samochodów, samochód ciężarowy przejechał o 25% mniejszą drogę niż osobowy;
- ☐ samochody spotkały się w połowie drogi między miastami A oraz B.

Zadanie 4. Kasia i jej młodsza siostra Basia mają razem 33 lata. Wiadomo, że Kasia miała 4 razy tyle lat ile miała Basia wtedy, gdy Kasia miała tyle lat, co Basia obecnie. Stąd:

- ☐ Kasia ma obecnie 21 lat;
- ☐ Kasia jest o 9 lat starsza od Basi;
- ☐ wiek Kasi jest o 75% większy niż wiek Basi;
- ☐ gdy urodziła się Basia, Kasia miała 8 lat.

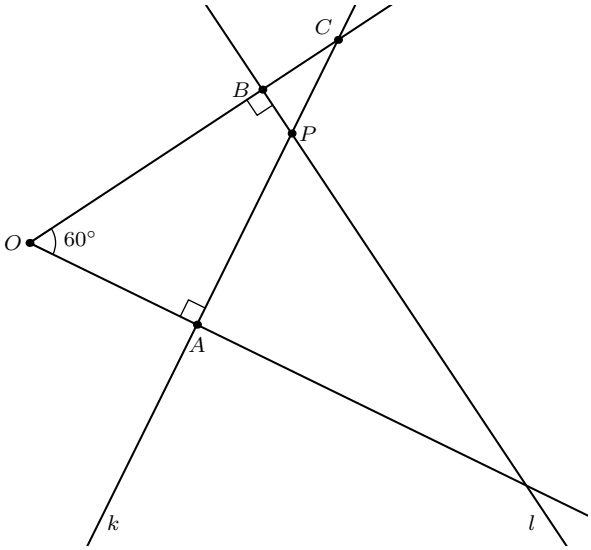
Zadanie 5. Liczba naturalna n przy dzieleniu przez 4 daje resztę 2. A zatem:

- ☐ kwadrat liczby n jest podzielny przez 4;
- ☐ liczba n jest nieparzysta;
- ☐ n jest liczbą pierwszą;
- ☐ kwadrat liczby n przy dzieleniu przez 8 daje resztę 4.

Zadanie 6. Dany jest trójkąt o bokach a, b, c. A zatem:

- ☐ boki tego trójkąta mogą mieć długości 2 cm, 4 cm oraz 5 cm;
- ☐ wysokości tego trójkąta mogą mieć długości 1 cm, 3 cm oraz 5 cm;
- ☐ jeśli $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$ oraz najdłuższa wysokości ma długość $\frac{12\sqrt{6}}{5}$, to wysokość poprowadzona do boku b ma długość $2\sqrt{6}$;
- ☐ jeśli $a = 2$, $b = 3$, to $1 < c < 5$.

Zadanie 7. Ramiona kąta o mierze 60° przecięto dwiema prostymi k oraz l, które są prostopadłe do ramion kąta. Proste te przecięły się w punkcie P (patrz rysunek). Wiedząc, że $|OB| = 6$ oraz $|BC| = 2$, oblicz obwód i pole czworokąta $APBO$.



Zadanie 8. Pole trójkąt równobocznego ABC wynosi $16\sqrt{3}$. Wewnątrz tego trójkąta wybrano dowolny punkt D. Oblicz sumę odległości punktu D od wszystkich boków trójkąta ABC.

Zadanie 9. Wiedząc, że $a > b > 0$ oraz $a^2 + b^2 = 4ab$, oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{a+b}{a-b}$.

BRUDNOPIS